

Математическая модель динамики продаж инновационного товара



И. А. Баев,
д. э. н., профессор,
декан факультета экономики и управления
e-mail: baev@econom.susu.ac.ru



Д. А. Дрозин,
ассистент кафедры прикладной математики
e-mail: drozin2005@mail.ru

Южно-Уральский государственный университет

Разработана математическая модель динамики продаж нового товара учитывающая скорость распространения информации о новом товаре, структуру покупательского спроса и запаздывание покупки товара потенциальным покупателем.

Ключевые слова: математическая модель, инновационный товар, распространение информации, функция покупательского спроса, функция запаздывания покупок товара.

Введение

Инновационное развитие Российской экономики является одним из важнейших направлений модернизации нашей страны. Различные аспекты инновационного развития рассматривались в работах [1–4].

Одним из важнейших факторов продвижения инновационного товара на рынке является рациональное управление его ценой [5], для чего необходимо достаточно точное прогнозирование динамики его продаж.

В настоящее время прогнозирование динамики продаж [6] осуществляется, в основном, статистическими методами («черный ящик»), не рассматривающими механизм процесса. В данной работе предлагается детерминированная модель, учитывающая наиболее важные, на наш взгляд, аспекты:

- скорость поступления информации о новом товаре к потенциальным покупателям;
- изменение покупательской способности потенциальных покупателей в зависимости от цены товара;
- интервал времени между получением информации о новом товаре и его реальной покупкой (запаздывание покупок).

1. Постановка задачи

Пусть в день t_0 на рынок поступил новый (усовершенствованный) товар и начата рекламная компания по его распространению. Механизмы распространения

информации об инновации среди членов социальной системы раскрываются в теории диффузии инноваций [7], где рассматривается не только влияние СМИ на распространение информации среди членов социальной системы, но и влияние межличностного общения между ними, определено распределение принимающих инновацию во времени, определена зависимость изменения количества людей узнавших об инновации во времени — s -образная кривая, математическая модель которой описана в работе А. А. Самарского, А. П. Михайлова [8]. В работе также учитывается распространение информации о новом товаре двумя способами: через средства массовой информации (СМИ) и путем непосредственного обмена информацией о товаре между людьми («слухи»).

При учете распространения информации рассматриваем только тот контингент покупателей, которым интересен новый товар и которые, в случае, если цена будет их устраивать, купят его.

Потенциальный покупатель, решивший приобрести новый товар, не сразу пойдет в магазин за ним. Нужно некоторое время на раздумья (инкубационный период), длительность которого зависит от особенностей принятия инноваций [7]. Так выделяют пять групп людей: новаторы, ранние принимающие, раннее большинство, позднее большинство, отстающие.

Формализуем приведенные выше положения, математизируем их.

1. Используем известную модель рекламы и слухов [8]

$$\frac{dN}{dT} = (\alpha + \beta N)(\bar{N} - N), \quad (1)$$

где $\bar{N}$ — количество возможных покупателей нового товара на рынке, N — количество покупателей, уже узнавших о новом товаре к моменту времени t ; α, β — коэффициенты. Коэффициент α связан с распространением информации через СМИ, коэффициент β — с распространением информации через «слухи».

Введем функцию $\varphi(t)$, равную правой части уравнения (1). Функция $\varphi(t)$ определяет скорость распространения информации о новом товаре и его цене. Будем измерять время в днях. Так, например, $\varphi(3)$ — число возможных покупателей, узнавших о новом товаре в течение третьего дня, $\varphi(t) \Delta t$ — число возможных покупателей узнавших о новом товаре в течение Δt дней, начиная с дня t . Один из возможных видов функции $\varphi(t)$ приведен на рис. 1.

- Введем функцию $\chi(P)$ — долю возможных покупателей, знающих о новом товаре и готовым купить его по цене P или дешевле: $\chi(P)$ можно назвать функцией покупательского спроса (платежеспособного спроса). В первом приближении, эту функцию можно аппроксимировать прямой линией (рис. 2). Можно считать, что ось χ упорядочена по степени платежеспособности покупателей. Внизу находятся люди, которые могут купить товар и по более дорогой цене, выше — которые купят, если цена будет поменьше.
- Введем функцию $f(\tau)$ — долю людей, которые купят товар через τ дней после того, как о нем услышат: $f(\tau)$ можно назвать функцией запаздывания покупок товара, ее график имеет вид кривой нормального распределения [7].

2. Построение дискретной модели

Пусть вечером дня $t_0=0$ на рынок поступает новый товар по цене P_0 и начата рекламная компания. Рассмотрим продажи товара за T дней.

К концу первого дня, $t=1$, о новом товаре узнало $\varphi(1)$ потенциальных покупателей. Захотят и смогут купить новый товар $\varphi(1) \chi(P_0)$ человек. Однако не все они купят товар в первый же день. Покупки распределяются в соответствии с функцией $f(\tau)$.

Так в первый день, $t=1$, купят товар

$$M_{1,0} = \varphi(1) \chi(P_0) f(0)$$

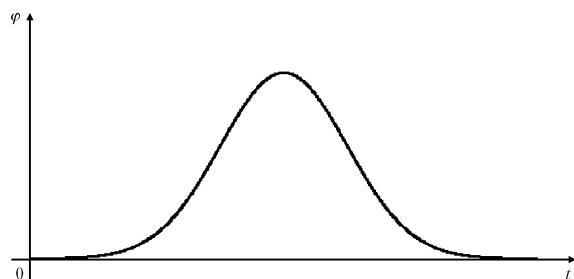


Рис. 1. Функция скорости распространения информации $\varphi(t)$

людей. Во второй день, $t=2$, товар купят

$$M_{1,1} = \varphi(1) \chi(P_0) f(1)$$

людей, из числа услышавших о товаре в первый день. В третий день, $t=3$, товар купят

$$M_{1,2} = \varphi(1) \chi(P_0) f(2)$$

людей, из числа услышавших о товаре в первый день. В день $t=T$ товар купят

$$M_{1,T-1} = \varphi(1) \chi(P_0) f(T-1)$$

людей, из числа услышавших о товаре в первый день. Здесь $M_{t,\tau}$ — число потенциальных покупателей услышавших о товаре в день t и купивших его через τ дней после этого.

Рассмотрим состояние рынка к концу торгового дня $t=2$. За этот день о новом товаре узнало $\varphi(2)$ потенциальных покупателей. Соберутся покупать его $\varphi(2) \chi(P_0)$ людей. В этот же день, $t=2$, $\tau=0$, купят товар

$$M_{2,0} = \varphi(2) \chi(P_0) f(0)$$

людей. На следующий день, $t=3$, $\tau=1$, купят товар

$$M_{2,1} = \varphi(2) \chi(P_0) f(1)$$

людей, узнавших о товаре в день $t=2$ и купивших его через $\tau=1$ дней после этого. На следующий день, $t=4$, $\tau=2$, купят товар

$$M_{2,2} = \varphi(2) \chi(P_0) f(2)$$

людей, узнавших о товаре в день $t=2$ и купивших его через $\tau=2$ дней после этого. В день $t=T$, $\tau=T-2$ товар купят

$$M_{2,T-2} = \varphi(2) \chi(P_0) f(T-2)$$

людей, из числа услышавших о товаре во второй день.

В день $t=T-1$ о новом товаре узнают $\varphi(T-1)$ новых потенциальных покупателей. Захотят и смогут купить этот товар $\varphi(T-1) \chi(P_0)$. В этот же день купят товар

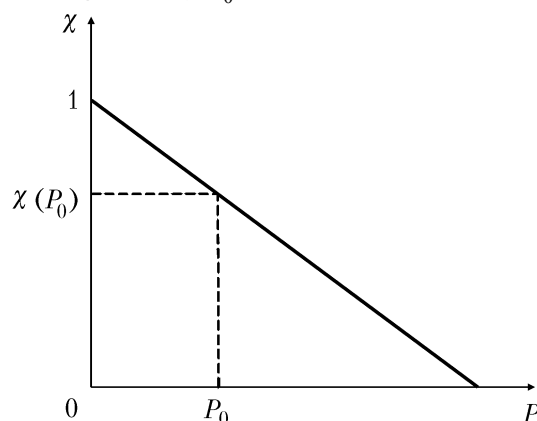


Рис. 2. Функция покупательского спроса $\chi(P)$

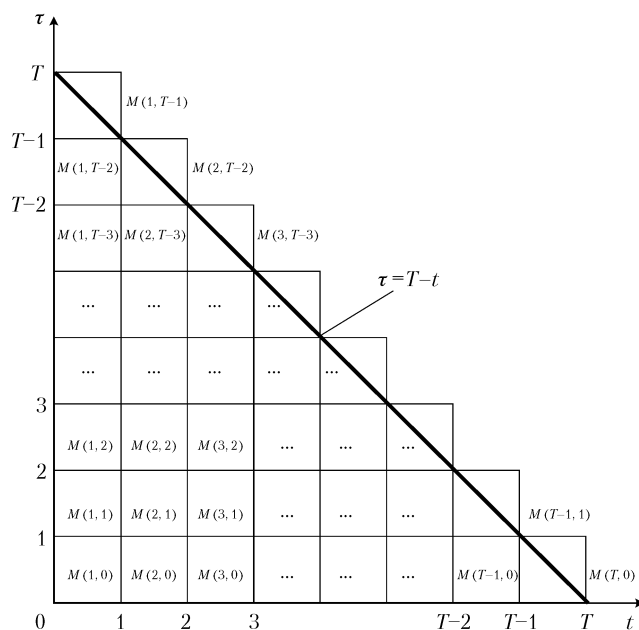


Рис. 3. Схема продаж

$$M_{T-1,0} = \varphi(T-1) \chi(P_0) f(0)$$

людей. На следующий день купят товар

$$M_{T-1,1} = \varphi(T-1) \chi(P_0) f(1)$$

людей, узнавших о товаре в день $t=T-1$ и купивших его через день после этого.

В день $t=T$ о товаре узнают $\varphi(T)$ новых потенциальных покупателей. Захотят и смогут купить этот товар $\varphi(T)\chi(P_0)$. В этот же день купят товар

$$M_{T,0} = \varphi(T) \chi(P_0) f(0)$$

людей.

Итак, за все T дней товар купят

$$\begin{aligned} &M_{1,0} + M_{1,1} + M_{1,2} + \dots + M_{1,T-3} + M_{1,T-2} + M_{1,T-1} + \\ &+ M_{2,0} + M_{2,1} + M_{2,2} + \dots + M_{2,T-3} + M_{2,T-2} + \\ &+ M_{3,0} + M_{3,1} + M_{3,2} + \dots + M_{3,T-3} + \\ &+ \dots + \end{aligned}$$

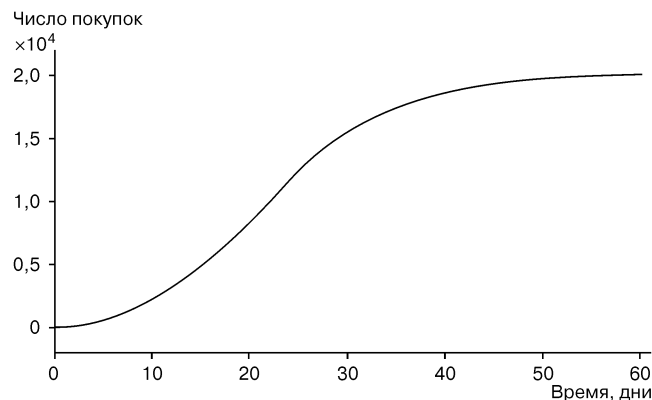


Рис. 5. Число людей, купивших товар в модельном примере

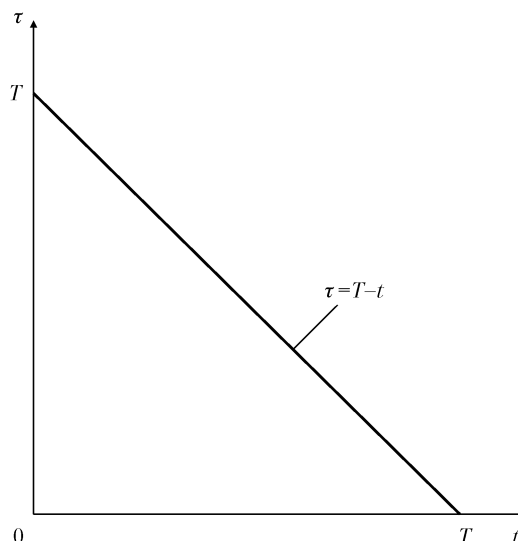


Рис. 4. Область интегрирования функции $M(t)$

$$\begin{aligned} &+ M_{T-1,0} + M_{T-1,1} + \\ &+ M_{T,0} \end{aligned}$$

людей. Здесь $M_{t,\tau} = \varphi(t) \chi(P_0) f(\tau)$.

3. Построение непрерывной модели

Перейдем к непрерывным функциям. Число потенциальных покупателей, узнавших о товаре в течение дня t можно записать в виде $\varphi(t) \Delta t$, где Δt — продолжительность интересующего нас периода в днях, то есть, в данном случае, $\Delta t=1$. Долю потенциальных покупателей, купивших товар в течение дня τ можно записать в виде $f(\tau) \Delta \tau$, где $\Delta \tau$ — продолжительность интересующего нас периода.

Число покупателей, услышавших о товаре в течение дня t и купивших его в течение дня τ после этого, равно $\varphi(t) \chi(P_0) f(\tau) \Delta t \Delta \tau$ или $M(t, \tau) \Delta t \Delta \tau$, где $M_{t,\tau} = \varphi(t) \chi(P_0) f(\tau)$. Тогда число продаж за T дней может быть записано в виде:

$$M(1,0) \Delta t \Delta \tau + M(1,1) \Delta t \Delta \tau + M(1,2) \Delta t \Delta \tau + \dots +$$



Рис. 6. Число ежедневных продаж в модельном примере

$$\begin{aligned}
 &+ M(1, T-3) \Delta t \Delta \tau + M(1, T-2) \Delta t \Delta \tau + \\
 &+ M(1, T-1) \Delta t \Delta \tau + M(2, 0) \Delta t \Delta \tau + M(2, 1) \Delta t \Delta \tau + \\
 &+ M(2, 2) \Delta t \Delta \tau + \dots + M(2, T-3) \Delta t \Delta \tau + \\
 &+ M(2, T-2) \Delta t \Delta \tau + M(3, 0) \Delta t \Delta \tau + M(3, 1) \Delta t \Delta \tau + \\
 &+ M(3, 2) \Delta t \Delta \tau + \dots + M(3, T-3) \Delta t \Delta \tau + \\
 &+ \dots + \\
 &+ M(T-1, 0) \Delta t \Delta \tau + M(T-1, 1) \Delta t \Delta \tau + \\
 &+ M(T, 0) \Delta t \Delta \tau.
 \end{aligned} \quad (2)$$

Рассмотрим график с осями t и τ , и отметим на нем участки, к которым относятся приведенные выше выражения (рис. 3).

Из рис. 3 видно, что выражение (2) представляет собой интегральную сумму для двойного интеграла

$$M(T) = \int_{D(T)} \int \varphi(t) \chi(P_0) f(\tau) dt d\tau,$$

где $D(T)$ — область, заключенная между осями t и τ и прямой $\tau = T - t$ (рис. 4).

Мы получили формулу для расчета объема продаж нового товара при условии неизменности цены

4. Модельный пример

Рассчитаем динамику продаж при следующих условиях.

1. Скорость распространения информации, в соответствии с (1), будем определять формулой

$$\varphi(t) = (\alpha + \beta N(t))(\bar{N} - N(t)),$$

где $\bar{N} = 100000$, $\alpha = 0,1$, $\beta = 5 \cdot 10^{-6}$.

2. Функцию покупательского спроса будем определять линейной формулой

$$\chi(P) = 1 - \frac{P}{\bar{P}},$$

где $\bar{P} = 1000$ руб., $P = 800$ руб.

3. Функцию запаздывания покупок будем определять формулой, похожей на формулу кривой нормального распределения:

$$f(\tau) = K \exp\left(-\frac{(\tau - a)^2}{2\sigma^2}\right),$$

где $a = 15$, $\sigma = 10$, K определяется из соображений нормировки

$$\left(\int_0^{+\infty} f(\tau) d\tau = 1\right).$$

В данном случае $K = 0,04275$.

Результаты расчета приведены на рис. 5, 6.

Из рис. 5, 6 видно, что в начальный период времени число продаж мало вследствие того, что мало людей

знают о товаре. Пик продаж наблюдается с 10-го по 30-й дни с момента появления инновационного товара на рынке. Далее число ежедневных продаж монотонно убывает вследствие того, что малым становится число потенциальных покупателей, еще не успевшим купить товар.

Заключение

1. Разработана математическая модель, описывающая динамику продаж инновационного товара. Модель учитывает три составляющие: скорость распространения информации о новом товаре по данной цене; величину платежеспособного спроса; запаздывание покупок товара.
2. Разработанная модель динамики продаж инновационного товара, адаптированная к конкретному рынку, может служить основой для процесса проектирования продаж инновационного товара и управления производством.

Список использованных источников

1. О. Г. Голиченко. Основные факторы развития национальной инновационной системы: уроки для России. М.: Наука, 2011.
2. К.А. Багриновский. Об оценке перспектив инновационной деятельности // Экономика и математические методы, т. 47, № 1, 2011.
3. В. Л. Макаров. Обзор математических моделей экономики с инновациями // Экономика и математические методы, т. 45, № 1, 2009.
4. А. А. Иващенко, Д. В. Колобов, Д. А. Новиков. Механизмы финансирования инновационного развития фирмы. М.: ИПУ РАН, 2005.
5. И. А. Баев, Д. А. Дрозин. Моделирование процессов освоения инноваций на конкурентном рынке // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Экономика и менеджмент, № 30, 2012.
6. Э. Е. Тихонов. Прогнозирование в условиях рынка. Невинномысск, 2006.
7. E. M. Rogers Diffusion of innovations, 5th edition. New York: Free Press, 2003.
8. А. А. Самарский, А. П. Михайлов. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002.

Mathematical model of the dynamics of sales of innovative products

I. A. Baev, Doctor of Economic Sciences, professor, Dean of the Faculty of «Economics and Management», South Ural state university.

D. A. Drozin, assistant, chair of applied mathematics, South Ural state university.

A mathematical model of the dynamics of a new product sales which takes into account the speed of diffusion of information about a new product, the structure of consumer demand, and delay purchase of goods.

Keywords: mathematical model, innovative products, diffusion of information, the function of consumer demand, the purchasing function of delay purchase of goods.